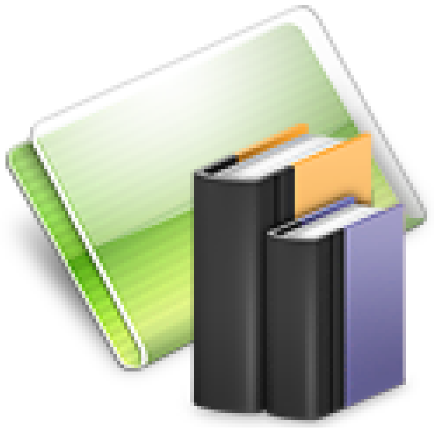
г.о. Королёв Московской области МБОУ «Лицей №4»».

Тема урока по алгебре:

«Равносильность уравнений».

11 класс (профильный уровень)



Выполнила: учитель математики

первой квалификационной категории

МБОУ «Лицей №4»

Лысенко Елена Николаевна.

2019год

План-конспект проведения урока.

Предмет: алгебра и начала анализа11 класс.

Тема урока: «Равносильность уравнений».

Тип урока: Обобщение и закрепление известного материала из курса алгебры 7-10 класса.

Цели урока:

1.Обобщить и систематизировать знания учащихся. Обучающая - вторичное осмысление уже известных знаний, выработка умений и навыков по их применению.

2.Развивающая - развитие логического мышления для сознательного восприятия учебного материала, внимание, зрительную память, активность учащихся на уроке. Предоставить каждому из учащихся проверить свой уровень подготовки по данной теме.

3.Воспитывающая - воспитание познавательной деятельности на уроке.

ЗАДАЧИ УРОКА:

- выработать у учащихся умение пользоваться теоремами равносильности уравнений.
- осуществить формирование первоначальных знаний в виде отдельных навыков после определенной тренировки решения уравнений.
- познакомить учащихся с частными случаями и отработать навыки по решению таких уравнений

Технологии: личносто – ориентированное развивающее обучение, технология проблемного обучения, ИКТ технологии.

Конспект урока:

1)Определения равносильных уравнений и уравнений - следствий.

(Слайды № 2, 3.)

Определение 1. **Два уравнения с одной переменной**
$f(x) = g(x)$ и $p(x) = h(x)$ называют равносильными, если множества их корней совпадают.

Иными словами, два уравнения называют *равносильными,* если они имеют одинаковые корни или если оба уравнения не имеют корней.

Например, уравнения $x^2 - 4 = 0$ и $(x + 2)(2^x - 4) = 0$ равносильны, оба они имеют по два корня: 2 и -2. Равносильны и уравнения $x^2+1=0$ и $\sqrt{x}=-3$, поскольку оба они не имеют корней.

Определение 2. **Если каждый корень уравнения**

$$f(x) = g(x)_{(1)}$$

является в то же время корнем уравнения

$$p(x) = h(x), \qquad (2)$$

то уравнение (2) называют следствием уравнения (1).

Например, уравнение $x - 2 = 3$ имеет корень $x = 5$, а уравнение $(x - 2)^2 = 9$ имеет два корня: $x_1 = 5$, $x_2 = -1$. Корень уравнения $x - 2 = 3$ является одним из корней уравнения $(x - 2)^2 = 9$. Значит, уравнение $(x - 2)^2 = 9$ — следствие уравнения $x - 2 = 3$.

Достаточно очевидным является следующее утверждение.

***Два уравнения равносильны тогда и только тогда, когда каждое из них является следствием другого*.**

2)Решение уравнения осуществляется в три этапа.

(Слайды № 4, 5)

Первый этап — *технический.* На этом этапе осуществляют преобразования по схеме (1) → (2) → (3)→ (4) → ... и находят корни последнего (самого простого) уравнения указанной цепочки.

Второй этап — *анализ решения.* На этом этапе, анализируя проведенные преобразования, отвечают на вопрос, все ли они были равносильными.

Третий этап — *проверка.* Если анализ, проведенный на втором этапе, показывает, что некоторые преобразования могли привести к уравнению-следствию, то обязательна проверка всех найденных корней их подстановкой в исходное уравнение.

Реализация этого плана связана с поисками ответов на четыре вопроса(проблема)

- **Как узнать, является ли переход от одного уравнения к другому равносильным преобразованием?**
- **Какие преобразования могут перевести данное уравнение в уравнение-следствие?**
- **Если мы в конечном итоге решили уравнение-следствие, то как сделать проверку в случае, когда она сопряжена со значительными вычислительными трудностями?**
- **В каких случаях при переходе от одного уравнения к другому может произойти потеря корней и как этого не допустить?**

3) Теоремы равносильности уравнений.

(Слайды № 6 – 10)

- ***«Спокойные теоремы»*** гарантируют равносильность преобразований без каких-либо дополнительных условий, их использование не причиняет решающему никаких неприятностей.

- ***«Беспокойные теоремы»*** работают лишь при определенных условиях, а значит, могут доставить некоторые неприятности при решении уравнений.

«Спокойные теоремы»:

Теорема 1. *Если какой-либо член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному.*

Теорема 2. *Если обе части уравнения возвести в одну и ту же нечетную степень, то получится уравнение, равносильное данному.*

Теорема 3. *Показательное уравнение* $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) *равносильно уравнению* $f(x) = g(x)$.

Решить уравнения на доске: $\boldsymbol{9^{7-x}=81^{2x}}$ ***и*** $\boldsymbol{7^{3-2x}=49^{2x}}$.

Прежде чем формулировать теоремы 4—6, напомним еще об одном понятии, связанном с уравнениями.

<u>Определение 3.</u> Областью определения уравнения ***f(x) = g(x)*** или областью допустимых значений переменной (ОДЗ) называют множество тех значений переменной ***x***, при которых одновременно имеют смысл выражения ***f(x)*** и ***g(x)***.

«Беспокойные теоремы»:

Теорема 4. ***Если обе части уравнения f(x) = g(x) умножить на одно и то же выражение h(x), которое:***

а) ***имеет смысл всюду в области определения (в области допустимых значений) уравнения f(x) = g(x)***

б) ***нигде в этой области не обращается в* 0**

то получится уравнение f(x)h(x) = g(x)h(x), равносильное данному в его ОДЗ.

Следствием теоремы 4 является еще одно «спокойное» утверждение: ***если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.***

Теорема 5. ***Если обе части уравнения f(x) = g(x) неотрицательны в ОДЗ уравнения, то после возведения обеих его частей в одну и ту же четную степень n получится уравнение $(f(x))^n=(g(x))^n$ равносильное данному в его ОДЗ.***

Теорема 6. ***Пусть a>0 и a≠1, X — решение системы неравенств***

***f(x)* > O,**

g(x)* > 0** ***Тогда уравнение ***$\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильно на множестве X уравнению f(x) = g(x)***

Краткая запись теорем 4 – 6.

4. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow h(x)f(x) = h(x)g(x)$, где $h(x) \neq 0$
и h(x) имеет смысл в ОДЗ данного уравнения.

5. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow (f(x))^n=(g(x))^n$, где $f(x)\geq 0$, $g(x)\geq 0$
и n=2k (чётное число).

6. $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$, где $f(x) > 0, g(x) > 0$
и a>0 и a≠1

4)Преобразование данного уравнения в уравнение – следствие. Проверка корней. (Слайды № 11 – 13)

Если в процессе решения уравнения применяем теоремы 4-6, не проверив выполнения ограничительных условий, то получим уравнение-следствие.

<u>Например.</u> ***а)*** *x – 1 = 3; x = 4*
Умножим обе части на (x – 2):
(x – 2)(x – 1) = 3(x – 2); x = 4 и x = 2 – посторонний корень⇒ ***проверка!***

б) *ln(2x-4) =ln(3x-5)*
Потенцируем 2x – 4 = 3x – 5; x = 1, но при этом значении уравнение не имеет смысла ⇒ ***искать ОДЗ или проверка.***

<u>Пример 1</u>

Решить уравнение $\sqrt{2x+5}+\sqrt{5x-6}=5$.

Решение. <u>Первый этап</u> — *технический.* На этом этапе, как мы отмечали выше, осуществляют преобразования заданного уравнения по схеме (1) -> (2) (3) -> (4) -> ... и находят корни последнего (самого простого) уравнения указанной цепочки.

Последовательно получаем:

$$\sqrt{5x-6}=5-\sqrt{2x+5};$$

$$(\sqrt{5x-6})^2=\left(5-\sqrt{2x+5}\right)^2;$$

$$10\sqrt{2x+5}=36-3x;$$

$$\left(10\sqrt{2x+5}\right)^2=(36-3x)^2$$

$$100(2x+5)^2 = 1296 - 216x + 9x^2;$$
$$9x^2 - 416x + 796 = 0;$$

$$x_1 = 2,\ x_2 = 44\tfrac{2}{9}$$

Второй этап — *анализ решения.* На этом этапе, анализируя проведенные преобразования, отвечают на вопрос, все ли они были равносильными.

Третий этап — *проверка.* Подставим поочередно каждое из найденных значений переменной в исходное уравнение.

$x_2 = 44\frac{2}{9}$ - посторонний корень.

Ответ: x = 2

Пример 2

Решить уравнение

$$\ln (x + 4) + \ln (2x + 3) = \ln (1 - 2x).$$

Решение. Первый этап. Воспользуемся правилом «сумма логарифмов равна логарифму произведения». Оно позволяет заменить выражение $\ln (x + 4) + \ln (2x + 3)$ выражением $\ln (x + 4)(2x + 3)$. Тогда заданное уравнение можно переписать в виде:

$$\ln (x + 4)(2x + 3) = \ln (1 - 2x).$$

Потенцируя, получаем:

$(x + 4)(2x + 3) = (1 - 2x);\ 2x^2 + 8x + 3x + 12 = 1 - 2x;\ 2x^2 + 13x + 11 = 0;$ $x_1 = -1,\ x_2 = -5{,}5.$

Второй этап. В процессе решения произошло расширение ОДЗ уравнения, значит, обязательна проверка.

Третий этап. Поскольку, кроме расширения ОДЗ уравнения, никаких других неравносильных преобразований в процессе решения уравнения не было, проверку можно выполнить по ОДЗ исходного уравнения. Она задается системой неравенств

$$\{x + 4 > 0,\ 2x + 3 > 0,\ 1 - 2x > 0.$$

Значение $x = -1$ удовлетворяет этой системе неравенств, а значение $x = -5{,}5$ не удовлетворяет уже первому неравенству, это посторонний корень.

Ответ: **-1.**

5) О потере корней. (Слайды № 15, 16)

Укажем две *причины потери корней при решении уравнений:*

1. Деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение $h(x)$ (кроме тех случаев, когда точно известно, что всюду в области определения уравнения выполняется условие $h(x) \neq 0$);

2. Сужение ОДЗ в процессе решения уравнения.

С первой причиной бороться нетрудно: приучайте себя переходить от уравнения $f(x)h(x) = g\{x)h\{x)$ к уравнению $h(x)(f(x) - g(x))=0$ (а не к уравнению $f(x)=g(x)$). Может быть, даже есть смысл вообще запретить себе деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение, содержащее переменную.

Со второй причиной бороться сложнее. Рассмотрим, например, уравнение ***lg x*^{2} = 4** и решим его двумя способами.

Первый способ. Воспользовавшись определением логарифма, находим:

$x^2 = 10^4$; $x_1 = 100$, $x_2 = -100$.

Второй способ. Имеем: $2\lg x = 4$; $\lg x = 2$; $x = 100$.

= -100. Причина в том, что вместо правильной формулы $lg\, x^2 = 2lg|x|$ мы воспользовались неправильной формулой

$\lg x^2 = 2lg\, x$, сужающей область определения выражения, из нее «выпал» открытый луч (-∞; 0), где как раз и находится «потерявшийся» при втором способе решения корень уравнения.

Вывод: применяя при решении уравнения какую-либо формулу (особенно тригонометрическую), следите за тем, чтобы области допустимых значений переменной для правой и левой части формулы были одинаковыми.

Решить на доске: $\sqrt{x^2 - 5x + 1} = \sqrt{x - 4}$ *и* $\sqrt{2x^2 - 6x - 17} = \sqrt{x - 2}$ *. Если корней несколько, в ответе запишите наименьший корень. (Ответы x=5)*

6)Работа в классе.

Самостоятельная работа – 15 мин.

7) Домашняя работа . § 26; базовый уровень - №26.1,26.4,26.11

. профильный уровень - №26.16.