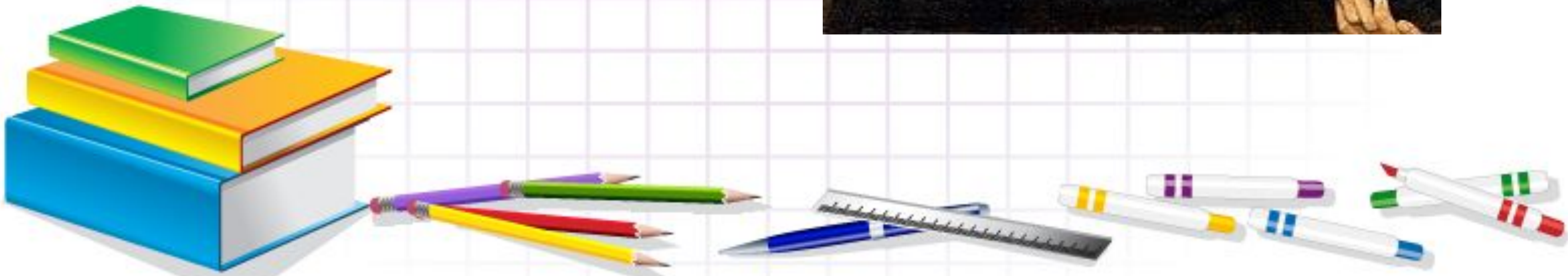
АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА,
11 КЛАСС.

РАВНОСИЛЬНОСТЬ УРАВНЕНИЙ.

Презентацию составила учитель математики
МБОУ «Лицей №4» г.о. Королёв Лысенко Е.Н.

Мало иметь хороший ум , главное – хорошо его применять.
Р.Декарт

- Основная теорема алгебры - общее число вещественных и комплексных корней многочлена равно его степени.



Повторение.

Найдите значение выражения:

- а)

$$\log_4(64c), если \log_4 c = -3.5$$

1)-6.5 2)-0.5 3)-10.5 4)-67.5

б) $$-4\log_{11} 11^3$$

1)-64 2)-1/64 3)-12
4)-1

в) $$\log_2 \frac{b}{16}, если \log_2 b = 3.$$

1)1 2)-7 3)-1
4)7

Проверьте себя

а)2 б)3 в)3

Повторение. Расставьте соответствие стрелками(x>0)

$$\log_x 16 = 2$$

$$\log_x 5 = -1$$

$$\log_x 81 = -4$$

$$\log_x 2\sqrt{2} = \frac{3}{2}$$

А 1/5

Б 2

В 4

Г 1/3

<u>Определение 1.</u> **Два уравнения с одной переменной $f(x) = g(x)$ и $p(x) = h(x)$ называют равносильными, если множества их корней совпадают.**

Иными словами, два уравнения называют ***равносильными***, если они имеют одинаковые корни или если оба уравнения не имеют корней.

Например, уравнения $x^2 - 4 = 0$ и $(x + 2)(2^x - 4) = 0$ равносильны, оба они имеют по два корня:

2 и -2. Равносильны и уравнения $x^2+1=0$ и $\sqrt{x}=-3$, поскольку оба они не имеют корней.

ПРИМЕРЫ:

- $9x-5=5x+3$ и $4x=8$
- $(x-3)(x+7)=0$ и $x^2+4x-21=0$
- $(x-2)(x+2)=0$ и $x^2=4$
- **уравнения, не имеющие корней, также считают равносильными**

<u>Определение 2.</u> **Если каждый корень уравнения**

$$f(x) = g(x) \qquad (1)$$

является в то же время корнем уравнения

$$p(x) = h(x), \qquad (2)$$

то уравнение (2) называют следствием уравнения (1).

Например, уравнение $x - 2 = 3$ имеет корень $x = 5$, а уравнение $(x - 2)^2 = 9$ имеет два корня: $x_1 = 5$, $x_2 = -1$. Корень уравнения $x - 2 = 3$ является одним из корней уравнения $(x - 2)^2 = 9$. Значит, уравнение $(x - 2)^2 = 9$ — следствие уравнения $x - 2 = 3$.

Достаточно очевидным является следующее утверждение.

Два уравнения равносильны тогда и только тогда, когда каждое из них является следствием другого.

В итоге можно сказать, что решение уравнения, как правило, осуществляется в три этапа.

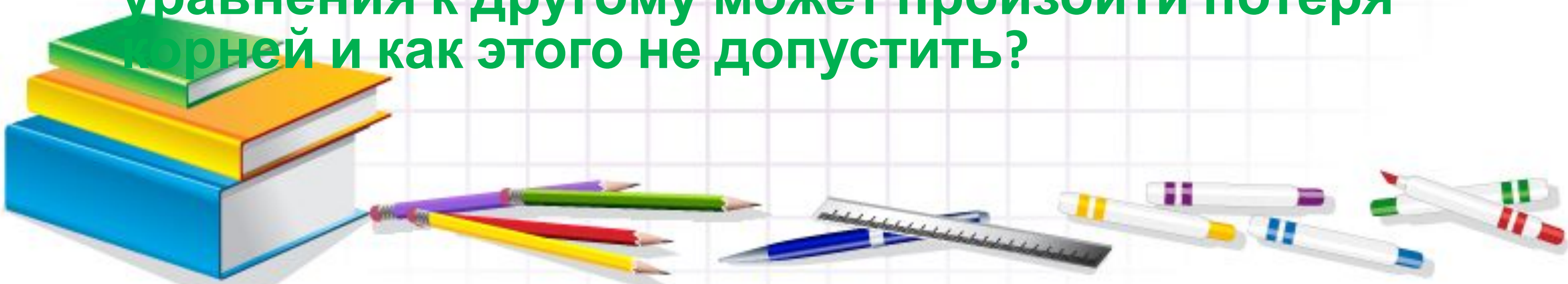
<u>Первый этап</u> — *технический.* На этом этапе осуществляют преобразования по схеме (1) → (2) → (3)→ (4) → ... и находят корни последнего (самого простого) уравнения указанной цепочки.

<u>Второй этап</u> — *анализ решения.* На этом этапе, анализируя проведенные преобразования, отвечают на вопрос, все ли они были равносильными.

<u>Третий этап</u> — *проверка.* Если анализ, проведенный на втором этапе, показывает, что некоторые преобразования могли привести к уравнению-следствию, то обязательна проверка всех найденных корней их подстановкой в исходное уравнение.

Реализация этого плана связана с поисками ответов на четыре вопроса.

- Как узнать, является ли переход от одного уравнения к другому равносильным преобразованием?
- Какие преобразования могут перевести данное уравнение в уравнение-следствие?
- Если мы в конечном итоге решили уравнение-следствие, то как сделать проверку в случае, когда она сопряжена со значительными вычислительными трудностями?
- В каких случаях при переходе от одного уравнения к другому может произойти потеря корней и как этого не допустить?



Теоремы о равносильности уравнений

- **«*Спокойные теоремы*»** гарантируют равносильность преобразований без каких-либо дополнительных условий, их использование не причиняет решающему никаких неприятностей.

- **«*Беспокойные теоремы*»** работают лишь при определенных условиях, а значит, могут доставить некоторые неприятности при решении уравнений.

«Спокойные теоремы»

Теорема 1. *Если какой-либо член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному.*

Теорема 2. *Если обе части уравнения возвести в одну и ту же нечетную степень, то получится уравнение, равносильное данному.*

Теорема 3. *Показательное уравнение* $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) *равносильно уравнению* $f(x) = g(x)$.

ОДЗ

Прежде чем формулировать теоремы 4—6, напомним еще об одном понятии, связанном с уравнениями.

Определение 3. Областью определения уравнения ***f(x) = g(x)*** или областью допустимых значений переменной (ОДЗ) называют множество тех значений переменной ***x,*** при которых одновременно имеют смысл выражения ***f(x)*** и ***g(x).***

«Беспокойные теоремы»

Теорема 4. *Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ умножить на одно и то же выражение $h(x)$, которое:*

а) *имеет смысл всюду в области определения (в области допустимых значений) уравнения $f(x) = g(x)$*

б) *нигде в этой области не обращается в 0*

то получится уравнение $f(x)h(x) = g(x)h(x)$, равносильное данному в его ОДЗ.

Следствием теоремы 4 является еще одно «спокойное» утверждение: ***если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.***

Теорема 5. *Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ неотрицательны в ОДЗ уравнения, то после возведения обеих его частей в одну и ту же четную степень n получится уравнение $(f(x))^n=(g(x))^n$ равносильное данному в его ОДЗ.*

Теорема 6. *Пусть $a>0$ и $a\neq1$, X — решение системы неравенств*

$$f(x) > 0,\quad g(x) > 0$$

Тогда уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильно на множестве X уравнению $f(x) = g(x)$

Преобразование данного уравнения в уравнение – следствие. Проверка корней.

Если в процессе решения уравнения применяем теоремы 4-6, не проверив выполнения ограничительных условий, то получим уравнение-следствие.

<u>Например.</u> ***а)*** $x - 1 = 3$; $x = 4$

Умножим обе части на $(x - 2)$:

$(x - 2)(x - 1) = 3(x - 2)$; $x = 4$ *и* $x = 2$ *– посторонний корень* $\Rightarrow$ ***проверка!***

б) $\ln(2x-4) = \ln(3x-5)$

Потенцируем $2x - 4 = 3x - 5$; $x = 1$, *но при этом значении уравнение не имеет смысла* $\Rightarrow$ ***искать ОДЗ или проверка.***

Преобразования, приводящие к равносильному уравнению	Примеры равносильных уравнений
Перенос членов уравнения из одной части в другую с противоположными знаками	4x-3=2x+5 и 4x-2x=5+3
Умножение или деление обеих частей уравнения на одно и то же число, отличное от нуля, или на выражение, имеющее постоянный знак при всех значениях неизвестного	$\frac{x^2}{4} = 1$ и $x^{2=4}$ $(x^2 - 4)(x^2 - 4) = 0$ $x^2 - 4 = 0$
Замена части уравнения тождественно равным ему выражением	$x^2 + 3x = 0$ X(x+3)=0

О потере корней

Укажем две *причины потери корней при решении уравнений:*

1. Деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение ***h(x)*** (кроме тех случаев, когда точно известно, что всюду в области определения уравнения выполняется условие ***h(x) ≠*** 0);

2. Сужение ОДЗ в процессе решения уравнения.

С первой причиной бороться нетрудно: приучайте себя переходить от уравнения ***f(x)h(x) = g{x)h{x)*** к уравнению ***h(x)(f(x) – g(x))=0*** **(**а не к уравнению *f(x)=g(x)***)**.** Может быть, даже есть смысл вообще запретить себе деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение, содержащее переменную.

Самостоятельная работа

1 вариант	2 вариант
Решить уравнения:	
1. $\ln(x+4) + \ln(2x+3) = \ln(1-2x)$	1. $\ln(x+2) + \ln(x-4) = \ln(3x-2)$
2. $\sqrt{2x+5} + \sqrt{5x-6} = 5$	2. $\sqrt{3x+4} + \sqrt{2x+3} = 2$
3. $\lg x^2 = 4$	3. $\lg x^4 = 8$

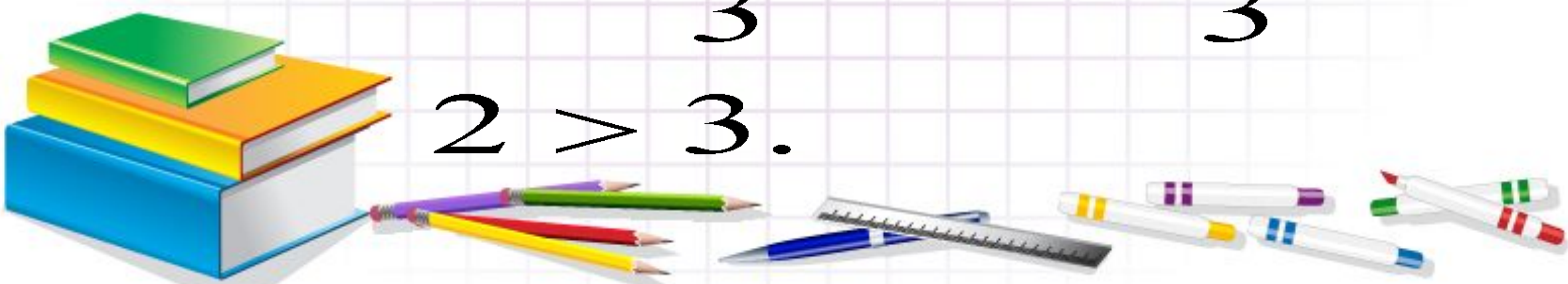
Дополнительный балл: «Лови ошибку».

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 > \left(\frac{1}{3}\right)^3;$$

$$\lg\left(\frac{1}{3}\right)^2 > \lg\left(\frac{1}{3}\right)^3;$$

$$2\lg\frac{1}{3} > 3\lg\frac{1}{3};$$

$$2 > 3.$$



Домашнее задание

- Параграф 26, пункт 3,4 прочитать и разобрать примеры 1-4.
- Решить: базовый уровень№26.1, 26.4, 26.11
- профильный уровень – 26.16.